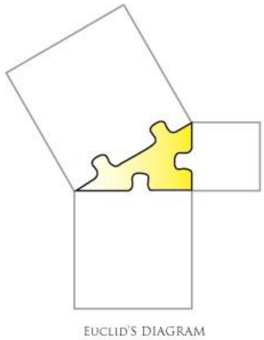
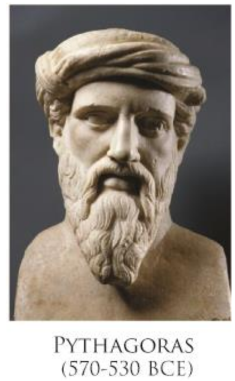
Le Pythagore de poche

Jacques Chaurette, Novembre 2020
jchaurette@pythagoraspuzzle.com




Le diagramme de Bhaskara (voir figure 1) est formé de pièces qu'on déplace de façon à prouver le théorème de Pythagore qui dit que $a^2 + b^2 = c^2$ et ceci sans une seule ligne d'algèbre.

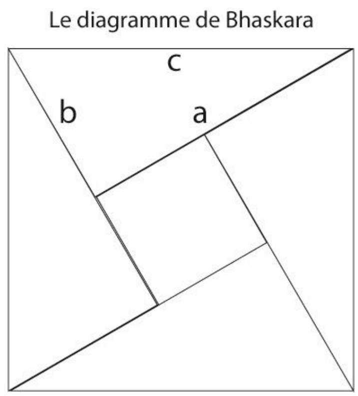



Figure 1

Un bon casse-tête est toujours un défi, dans ce cas la solution est inconnue ou si elle est connue il n'y a aucun indice de la transformation requise pour arriver à la solution. En supplément, la solution nous donne une relation mathématique fondamentale.

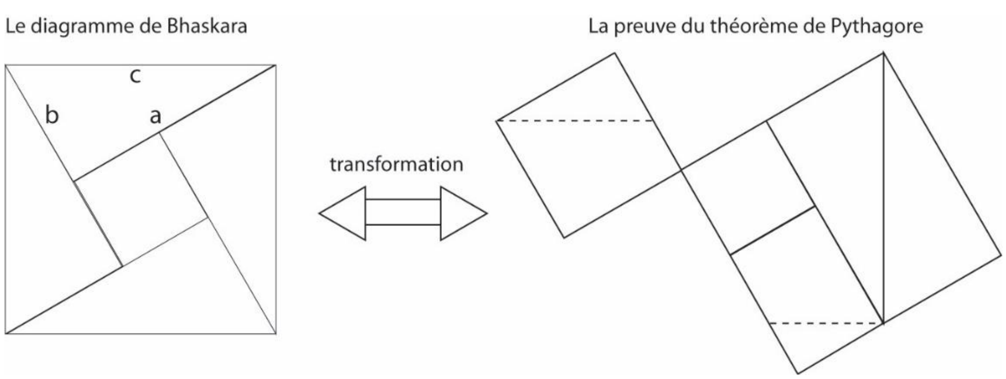



Figure 2

Pythagore est né sur l'île de Samos situé dans le Méditerranée environ 570-530 AEC, il était Grec et vécu ces dernières années dans la ville de Croton dans le sud de l'Italie. À ce moment, il y avait des colonies grecques répandues à travers la Méditerranée. On rapporte qu'il a beaucoup voyagé et qu'il est probable qu'il soit tombé sur la règle des angles droits des triangles à travers ces voyages possiblement en Égypte. Il était le leader d'un culte qui proposait que la nature, le monde et les astres étaient intimement liés aux nombres.

Un triangle à angle droit est un triangle qui a un seul angle droit; selon le théorème 6.7 d'Euclide dans son livre intitule "Les Éléments"[4] la somme des angles internes de n'importe quel triangle est 180°, donc il ne peut y avoir qu'un angle à 90 degrés dans un triangle à angle droit[5].

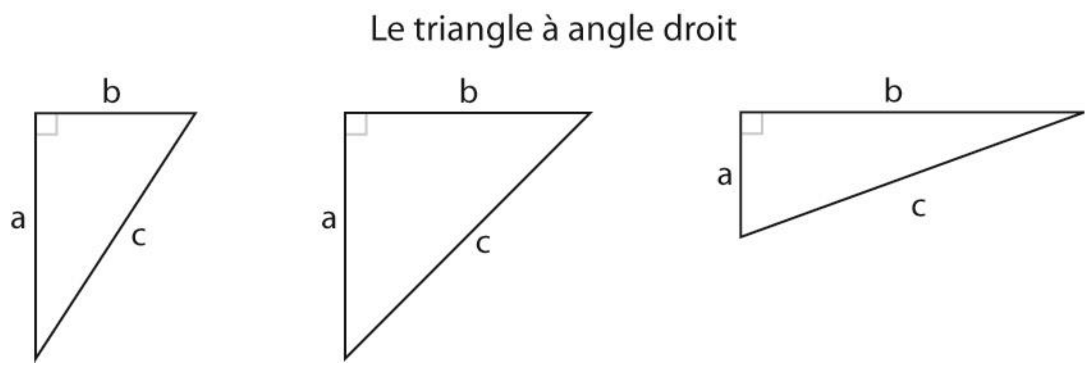



Figure 3 Différentes versions de triangle à angle droit.

Pythagore est connu pour deux découvertes majeures, la preuve concernant les triangles à angle droit considéré comme la base[2] des mathématiques et la relation numérique entre les sons musicales; ces deux découvertes résonnent toujours avec nous aujourd'hui. Malheureusement, la preuve des triangles à angle droit n'a pas été préservée. Le théorème de Pythagore est aussi la source de la trigonométrie qui a été développée pour assister les mesures d'arpentage et astronomique[4].

En ce qui concerne la musique, il a découvert qu'une corde sous tension dont on réduit la longueur par la moitié produit un ton une octave plus haut. Si on change la longueur aux deux tiers de la longueur initiale on obtient la note *sol* qui est la cinquième note dans la gamme majeure en *do*. Ce genre de changement de longueur nous permet de fixer les quatre autres notes de la gamme majeure avec des intervalles musicales bien définies. C'est la base de la gamme majeure et l'harmonie qui résulte de leurs combinaisons. Cette relation entre la longueur d'une corde est aujourd'hui bien connue, la fréquence et le ton résultant d'une corde vibrante dépend de sa longueur, la densité linéaire du matériel et la tension. Lorsque que frappé, une corde produit un nombre distinct de vagues entre deux point fixes; ceci a été étudié par beaucoup de chercheurs tel que E. Fourier qui a clairement démontrer ce phénomène et comment différents tons interagissent.

Cette idée a été étendue pour les astres tel qu'ils étaient connus à ce moment. La Terre était au centre et chaque planète incluant le soleil étaient tous sur des sphères individuelles centrées sur la Terre. On croyait que ces sphères de cristal vibraient avec les fréquences déterminées par Pythagore d'où la notion de musique des sphères.

De retour au théorème des triangles à angle droit, Pythagore ne l'a pas découvert puisqu'il était bien connu des Babyloniens 1000 années avant lui. La contribution de Pythagore a été de faire la preuve de cette règle. Les grecs étaient les premiers à établir cette notion de preuve, ils avaient compris que des relations tels que le trio de longueur 3-4-5 et d'autres de ce genre suivant la relation $3^2 + 4^2 = 5^2$, qu'il n'y avait aucune certitude que cette relation était exacte pour tous les cas possibles. Ils désiraient bâtir une fondation solide et fiable qui pourrait servir de base pour d'autres relations. Cette approche est la démarche utilisé par Euclide dans son œuvre "Les Éléments" qui apparut en 300 BCE, une compilation de tout le savoir connu à ce moment sur la géométrie et autres sujets mathématiques. Pour mille ans, ce tome a été la source des connaissances dans ce domaine. Avec le temps le théorème sur les angles droits des triangles sera connu comme le théorème de Pythagore.

J'ai trouvé le diagramme de Bhaskara dans un livre intitulé "The Pythagorean Proposition" par Elisha Scott Loomis qui contient 370 preuves du théorème de Pythagore. Mon intention n'était pas d'éplucher toutes ces preuves mais de voir s'il y avait quelques bijoux qui pourraient être instructifs. La plupart de ces preuves sont très détaillées avec beaucoup de ligne de construction et comparaison de surfaces et longueurs de ligne, mais caché dans ce tas de preuves était le diagramme du mathématicien Bhaskara (1114-1185 CE)[1]. La seule mention d'une preuve est le commentaire "cette image est tout ce vous avez besoin pour prouver le théorème de Pythagore" *(traduit de l'anglais)*.

Les lettres qui indiquent les longueurs des cotés du triangle dans la figure 1 ont été rajoutées. Naturellement un commentaire tel que "cette image est tout ce dont vous avez besoin pour prouver le théorème de Pythagore" attire notre attention et m'a donné la motivation de découvrir les secrets de ce diagramme, ce que sans doute Bhaskara avait anticipé. Il avait raison et il y a plus d'un secret.

L'idée maitresse de ce diagramme est de déplacer les différentes surfaces pour arriver à un assemble qui démontre la véracité du théorème de Pythagore.

La connaissance de ce théorème est précieuse, c'est un des secrets de l'univers qu'on peut chérir quand tout le reste est en doute.

Une conséquence du théorème de Pythagore a surpris et choqué Pythagore et ces disciples. La conclusion à laquelle ils sont arrivés a chambardée leur monde et le système de nombres d'une façon radicale.  Si on trace un carré avec des cotés de grandeur unitaire et ensuite une ligne entre deux coins opposés (la diagonale), par le théorème de Pythagore la valeur de la longueur de la diagonale est la racine carrée de 2.

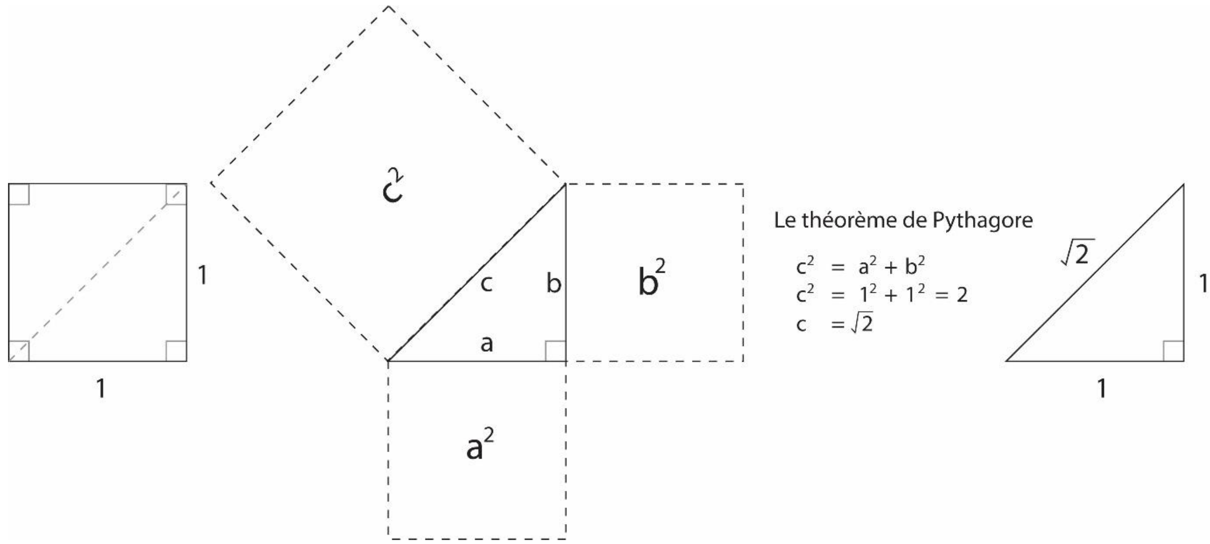



Figure 4 Les nombres irrationnels.

La $\sqrt{2}$ est remarquable par ce que sa valeur ne peut s'exprimer par une fraction, il n'existe pas de fraction pour exprimer ce nombre exactement. La valeur de $\sqrt{2}$ est 1.4142135624…Le pointillé exprime que les chiffres continuent à l'infini et par surcroit sont au hasard. Ceci est très différent d'une fraction qui s'exprime par un rapport de deux chiffres qui ont un nombre fini de chiffres ou une séquence qui se répète. Par exemple, 1/4 = 0.25, 2/3 = 0.6666…ou quelques fois écrit comme $0.\overline{6}$ ou la barre horizontale indique un chiffre qui se répète.

Pour les Pythagoriciens ceci voulait dire qu'on ne pouvait mesurer une ligne de longueur $\sqrt{2}$ et on disait que cette mesure était incommensurable. C'est à dire qu'il n'y avait pas de règle, peut importe la finesse des divisions pour mesurer cette longueur. Les anciens Grecs ont trouvés une élégante preuve de ce fait et aujourd'hui on comprend bien ces chiffres et on les appelle les nombres irrationnels, pas par ce qu'ils sont fous mais par ce qu'ils n'ont pas la même qualité de normalité des nombres entiers ou de fraction de nombres entiers. Il faut se rappeler que les chiffres négatifs étaient vu avec trépidation avant les années 1500.

Cet état de chose choquante pour le pythagoricien devait durer jusqu'à l'avenue de Stevin en 1585 ou la nature de ces nombres a été acceptée et on commença à les traités de la même façon que n'importe quel nombre. Aujourd'hui on utilise une valeur approximative pour les nombres tel que $\sqrt{2}$ qu'on peut exprimer aussi précisément que désiré ou requis.

Il y a des mathématiciens tel que le professeur Wildberger qui dispute la nature des nombres irrationnels. Prof. Wilberger est l'auteur d'une série de conférences sur YouTube sur l'histoire et le fondement des mathématiques[3].

C'est une des raisons pourquoi les grecs aimaient mieux travailler avec les surfaces que les longueurs de lignes.

Par exemple, la longueur de l'hypoténuse du triangle à la figure 5 est racine carrée($2^2 + 1^2$) = $\sqrt{5}$ . Un chiffre peu commode à calculer, mais on peut calculer la surface d'un carré avec un côté commun sur l'hypoténuse d'un triangle[3].

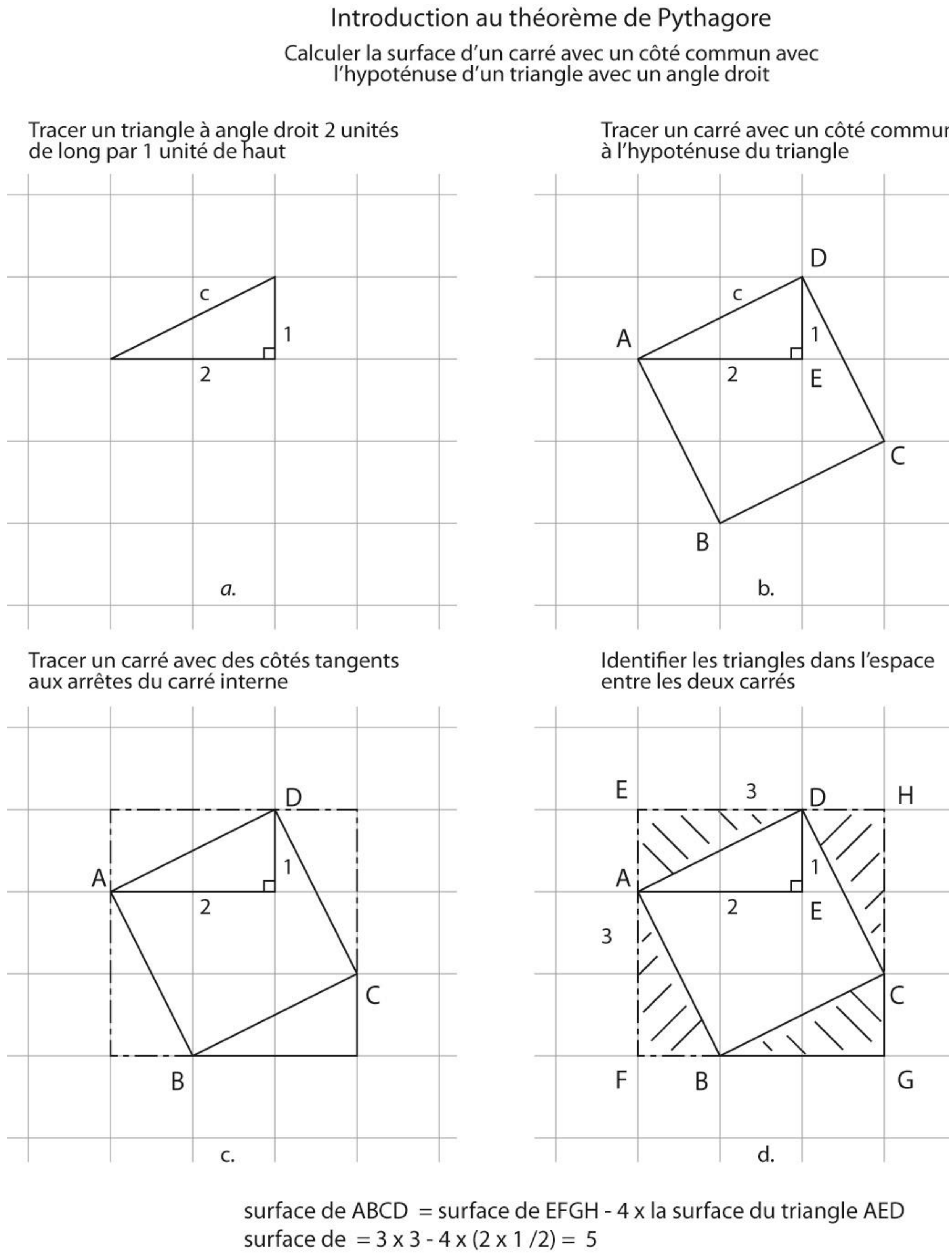



Figure 5 Introduction au théorème de Pythagore.

Dans la figure 5d apparait le diagramme que j’appelle le diagramme de Pythagore. Celui-ci est la clef de la preuve de Pythagore et la voici dans la prochaine figure. Cette preuve utilise aussi le déplacement de surfaces plutôt que la comparaison d’angles, longueurs, etc.

La stratégie est de déplacer les surfaces de telle façon de créer 2 carrés, un carré avec surface A2 correspondant au carré formé par le petit coté (vertical) du triangle 1 figure 6 et un carré avec surface A1 du triangle 1 associé au côté horizontal du triangle 1. Il devient évident que la somme de ces deux surfaces égale la surface A3 correspondant au carré formé par l’hypoténuse du triangle 1, ce qui prouve le théorème de Pythagore.

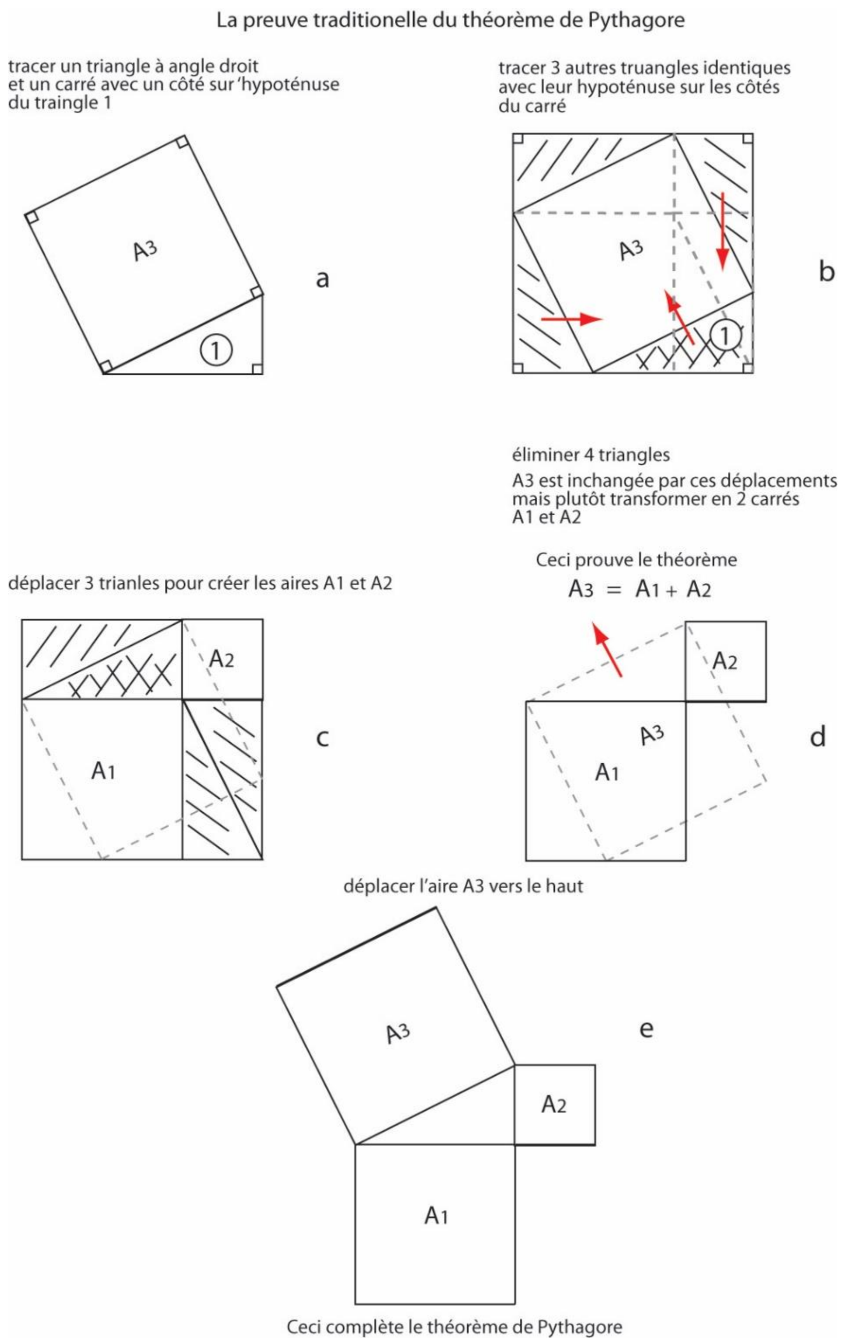



Figure 6 La preuve traditionnelle du théorème de Pythagore.

Le diagramme de Bhaskara (figure 1) est différent du diagramme traditionnel de Pythagore à la figure 6c. On soupçonne qu'il y a une relation que nous verrons dans un moment.

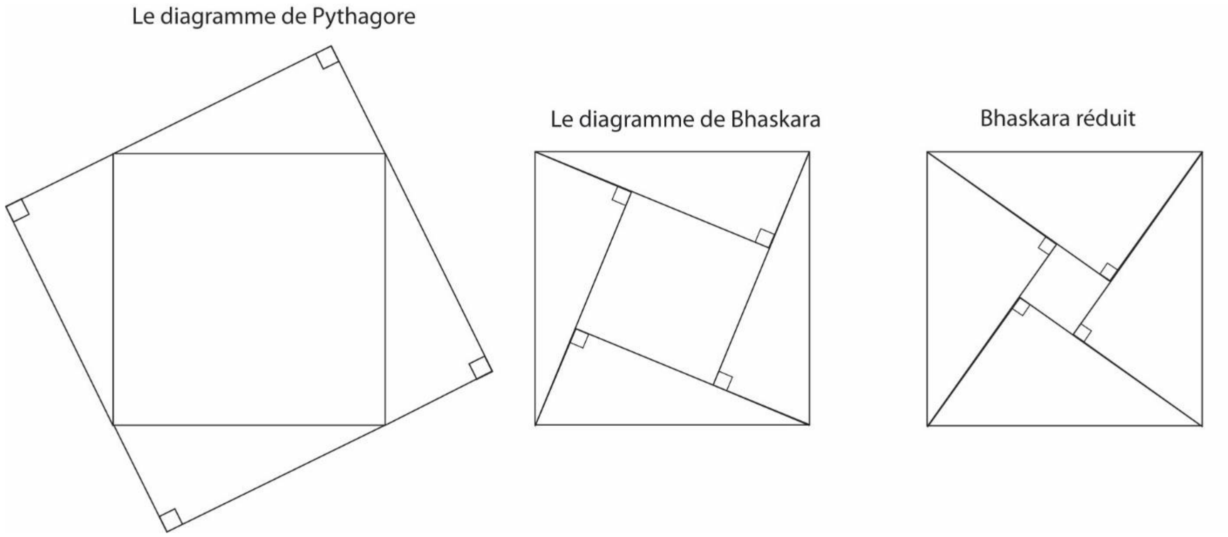



Figure 7 La transformation du diagramme de Pythagore traditionnel au diagramme de Bhaskara.

La prochaine figure montre la preuve traditionnelle de Pythagore utilisant le diagramme traditionnel et en parallèle la preuve utilisant le diagramme de Bhaskara. Un avantage de cette deuxième preuve est que toutes les surfaces internes au carré extérieur sont utilisées, à l'opposé du diagramme traditionnel où la surface A3 est transformée en deux surfaces A1 et A2. Le diagramme de Bhaskara rend possible l'utilisation de toutes les pièces du diagramme.

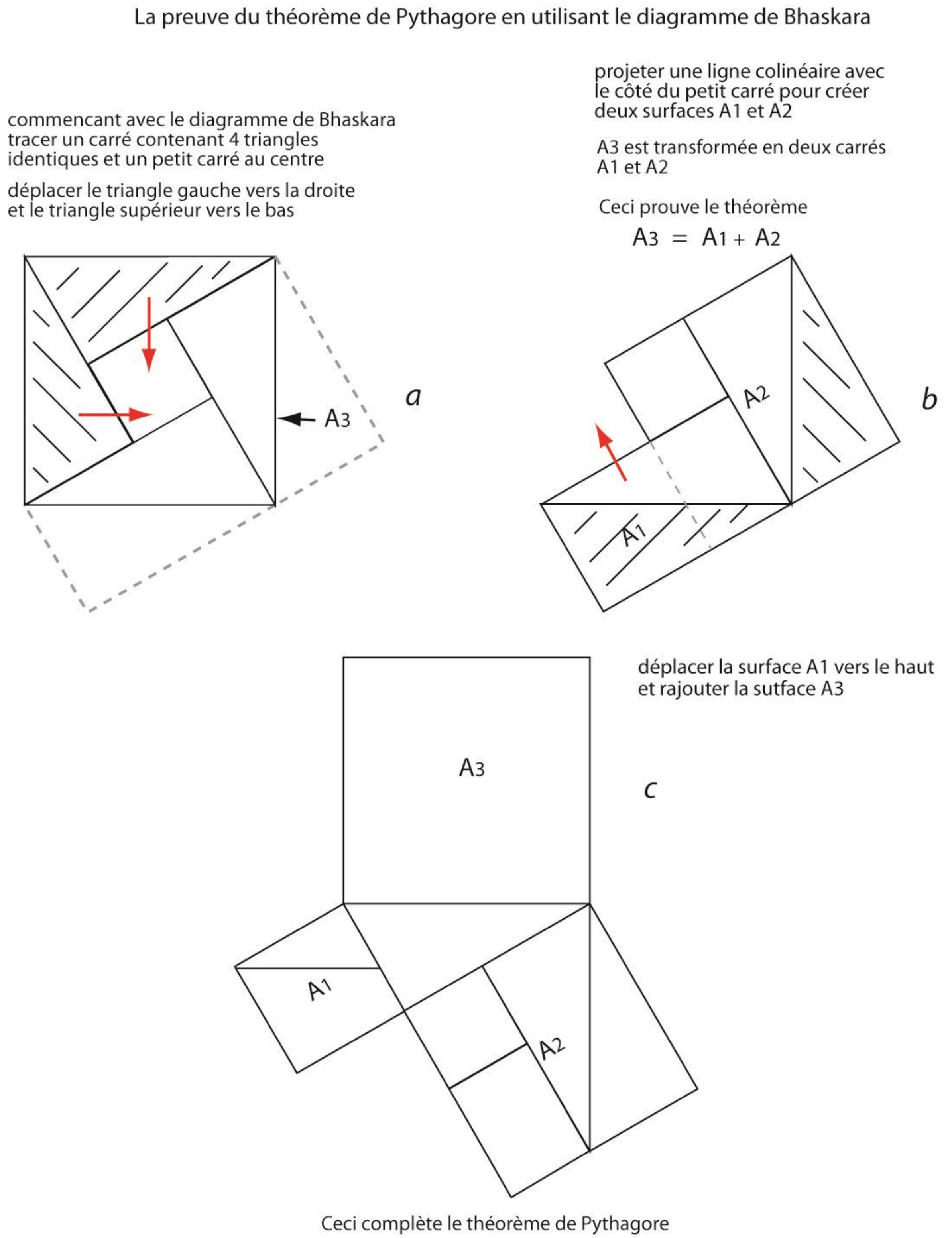



Figure 8 Comparaison de la preuve traditionnelle du théorème de Pythagore avec la preuve de Bhaskara.

Le diagramme traditionnel de Pythagore est en réalité un cas spécial du diagramme de Bhaskara. La surface du carré au centre du diagramme de Bhaskara peut être modifier au point où elle disparait et à l’autre extrême ou elle déborde son enveloppe et devient le diagramme de Pythagore.

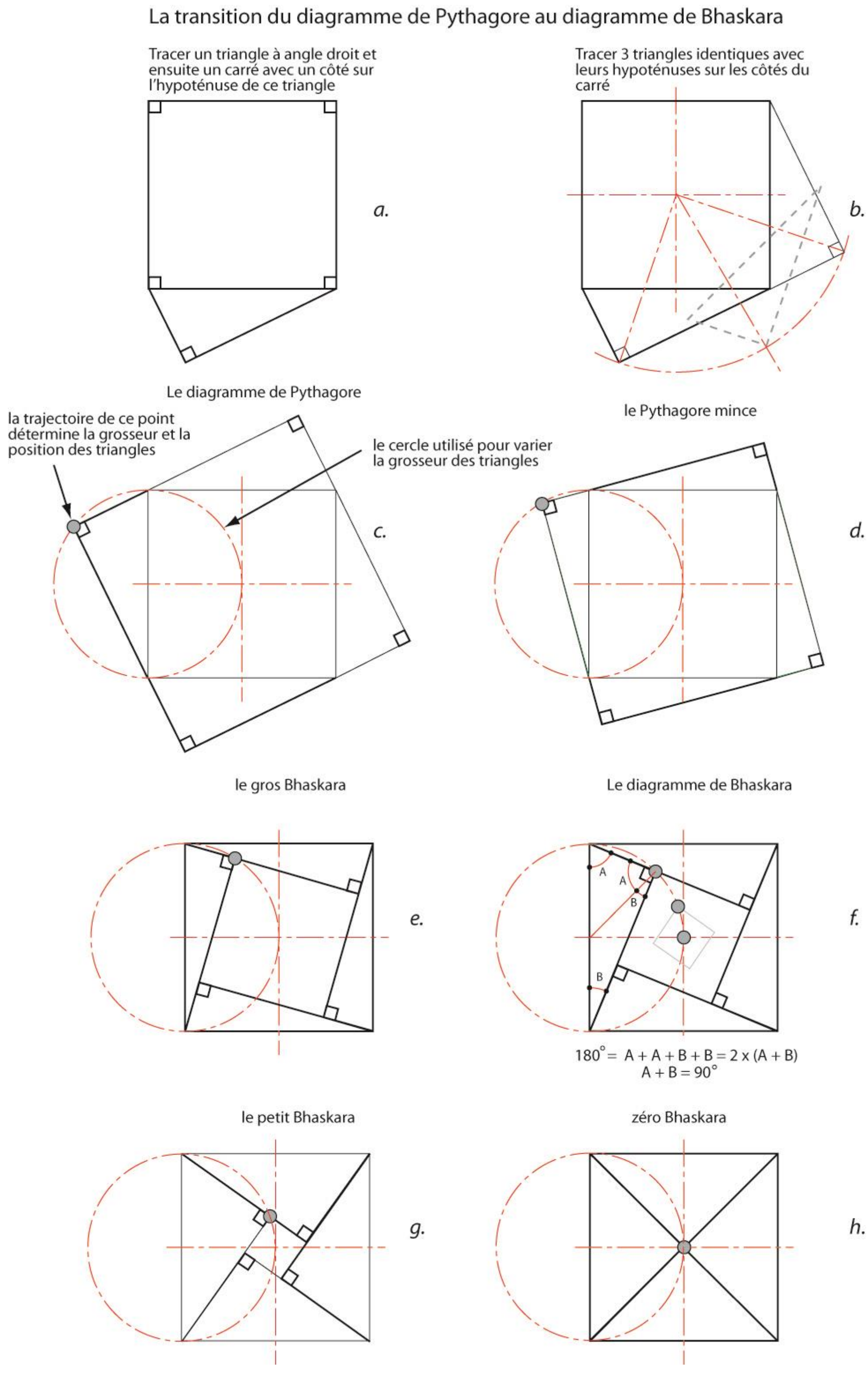



Figure 9 La transition du diagramme traditionnel de Pythagore au diagramme de Bhaskara.

Nous sommes rendus à la dernière surprise de Bhaskara, on peut continuer la transformation à la figure précédente et ceci nous ramène au diagramme de Pythagore.

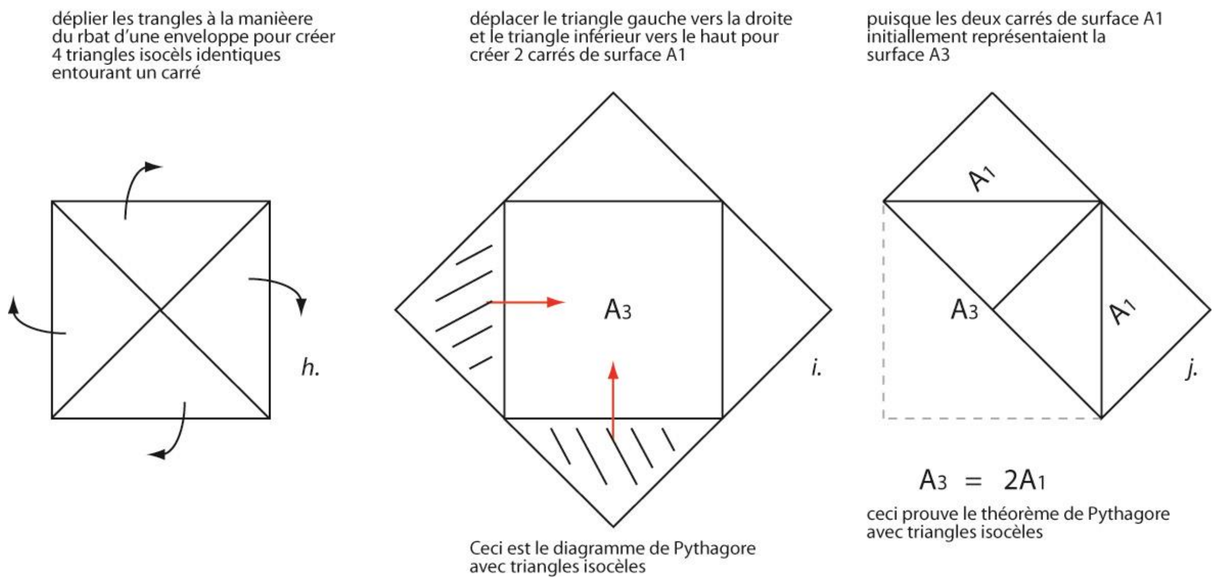



Figure 10 La dernière transition du diagramme de Bhaskara pour nous ramener au diagramme  de Pythagore.

J'espère que vous vous amuserez autant que moi avec le casse-tête de Pythagore sous forme de Bhaskara, il vaut la peine de s'y attarder et le moment de révélation est surprenant et exquis.

Réf. 1 The Pythagorean Theorem, Eli Maor

Réf. 2 The Ascent of Man, Jacob Bronowsky

Réf. 3 Math Foundations, Prof. Norman Wildberger, https://www.youtube.com/watch?v=REeaT2mWj6Y&list=PLIljB45xT85DpiADQOPth56AVC48SrPLc&index=2&t=0s

Réf. 4 Les Élements d'Euclide